Progetto Nazionale:

Dinamica non perturbativa delle teorie di gauge e problemi collegati nella teoria quantistica dei campi, in teoria delle stringhe e in meccanica statistica

Progetto dell'unità di TS:

Formule di localizzazione e calcolo multi-istantonico

Collaboratori:

F. Fucito (Roma II), J.F. Morales (INFN Frascati), A. Tanzini (LPTHE Parigi VI → SISSA)

V. Roubtsov (Angers)

Nelle teorie di gauge supersimmetriche il contributo del settore topologico alla funzione di partizione è dato da un integrale su uno spazio finito-dimensionale (spazio dei vuoti classici) detto spazio dei moduli degli istantoni.

Lo spazio dei moduli degli istantoni ha una geometria molto complicata e il calcolo della funzione di partizione "per forza bruta" è senza speranza appena la carica topologica degli istantoni è superiore a $k = 2$.

Se la teoria ha delle simmetrie queste si possono usare, sotto opportune ipotesi, per ridurre il calcolo dell'integrale a un numero finito di "residui".

Lagrangiana della SYM $\mathcal{N}=2$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathrm{tr}\Big(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathrm{i}\bar\lambda^{\dot\alpha}_{I}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_\mu\lambda^{\alpha I} - \mathcal{D}_\mu\phi^\dagger\mathcal{D}^\mu\phi \\
&- \frac{1}{2}[\phi^\dagger,\phi]^2 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\epsilon_{IJ}[\lambda^{\alpha I},\lambda^J_\alpha] \\
&+ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\phi\epsilon^{IJ}[\bar\lambda_{\dot\alpha I},\bar\lambda^{\dot\alpha}_I]\Big)
\end{aligned}
$$

Funzione di partizione = Integrale sullo spazio $\mathcal{M}_{k,N}$ (spazio dei moduli degli $SU(N)$-istantoni "framed" di carica topologica k)

Moduli degli zero-modi fermionici (soluzioni dell'equazione di Dirac nel background dato dall'istantone): elementi di un fibrato indice (alla Atiyah-Singer) su $\mathcal{M}_{k,N}$.

Per $\mathcal{N}=2$ il fibrato indice è il fibrato tangente, ovvero, gli zero-modi fermionici sono vettori tangenti allo spazio dei moduli bosonico.

Descrizione ADHM:

$B_1, B_2 \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(N,N)$,
$I \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(k,N)$, $J \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(N,k)$
Vincoli :

$$[B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0$$

$$[B_1, B_2] + IJ = 0$$

$$\mathcal{M}^0_{k,N} = \{B_1, B_2, I, J \,\big|\, \text{vincoli}\}/\mathrm{U}(k)$$

$\mathcal{M}_{k,N}$ = risoluzione delle singolarità di $\mathcal{M}^0_{k,N}$.

Contenuto in campi della $SU(N)$ $\mathcal{N}=2$ SYM in termini di dati ADHM:

B_1, B_2, I, J
+ partners fermionici M_1, M_2, μ_I, μ_J
+ moltiplicatori di Lagrange $H_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{C}}$
+ loro partners fermionici $\chi_{\mathbb{R}}$, $\chi_{\mathbb{C}}$
+ campo bosonico aux. $\bar{\phi}$ con partner η

Generatore infinitesimo delle simmetrie $SU(N)$ e $U(k)$ (operatore BRST):

$$\begin{aligned}
Q &= \mu_I \frac{\partial}{\partial I} + \mu_J \frac{\partial}{\partial J} + M_\ell \frac{\partial}{\partial B_\ell} + [\phi, \chi_{\mathbb{R}}] \frac{\partial}{\partial H_{\mathbb{R}}} \\
&+ [\phi, \chi_{\mathbb{C}}] + \frac{\partial}{\partial H_{\mathbb{C}}} + \eta \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}} \\
&+ (\phi I - I a) \frac{\partial}{\partial \mu_I} + (-J\phi + aJ) \frac{\partial}{\partial \mu_J} \\
&+ [\phi, M_\ell] \frac{\partial}{\partial M_\ell} \\
&+ H_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \chi_{\mathbb{R}}} + H_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \chi_{\mathbb{C}}} + [\phi, \bar{\phi}] \frac{\partial}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Coomologia equivariante e formule di localizzazione

Quando un gruppo di Lie G agisce su una varietà M è possibile introdurre un complesso (forme differenziali equivarianti) che dà luogo alla coomologia equivariante $H_G^\bullet(M)$.

Gli elementi del complesso sono oggetti che agendo su un elemento ξ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ producono una forma differenziale $\alpha(\xi)$ su M.

Se ξ è tale che il suo esponenziale agisce su M con un numero finito di punti fissi si ha una formula di localizzazione:

$$\boxed{\int_M \alpha(\xi) = (-2\pi)^{n/2} \sum_{p \in M_\xi} \frac{\alpha(\xi)_0(p)}{\det^{1/2} L_p}.}$$

L'operatore BRST è un differenziale equivariante, e l'azione della $\mathcal{N}=2$ SYM è una forma equivariantemente chiusa! (entrambi espressi in termini di dati ADHM)

$$
\begin{aligned}
S &= Q\,\mathrm{Tr}\Big(\tfrac{1}{4}\eta[\phi,\bar{\phi}] + \vec{H}\cdot\vec{\chi} - i\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\chi} \\
&- \tfrac{1}{2}\sum_{\widehat{s}=1}^{4}\big(\Psi^{\dagger}_{\widehat{s}}(\bar{\phi}+\lambda_{\widehat{s}})\cdot B_{\widehat{s}} + \Psi_{\widehat{s}}(\bar{\phi}+\lambda_{\widehat{s}})\cdot B^{\dagger}_{\widehat{s}}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Però l'azione di $U(k)\times SU(N)$ non ha punti fissi isolati!

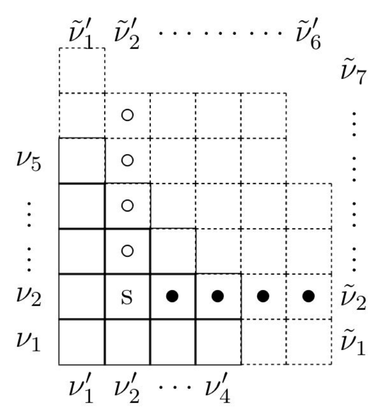
Nekrasov (a partire da un'analoga idea di Nakajima): introdurre un'ulteriore azione del toro T^2.

$$\mathcal{Z}_k = \sum_{\{Y_\lambda\}} \prod_{\lambda,\tilde{\lambda}}^{N} \prod_{s \in Y_\lambda} \frac{1}{E(s)(E(s)-\epsilon)}$$

$$E(s) = a_{\lambda\tilde{\lambda}} - \epsilon_1 h(s) + \epsilon_2 (v(s)+1)$$

$$h(s) = \nu_i - j \qquad v(s) = \tilde{\nu}'_j - i$$

$\nu_{i_\lambda}, \nu'_{j_\lambda}$ denotano rispettivamente le lunghezze della i_λ-ma colonna e della j_λ-ma riga



Sviluppi

Formule di localizzazione generalizzate, che utilizzano la nozione di algebroide di Lie (U. B., P. Rossi, V. Roubtsov in preparazione).

Permettono di trattare anche casi dove il fibrato indice sullo spazio dei moduli bosonici non sia il fibrato tangente:

teorie supersimmetriche diverse dalla SYM $\mathcal{N} = 2$.