

La radiazione di corpo nero - I

Edoardo Milotti

CdS Fisica A. A. 2007-8

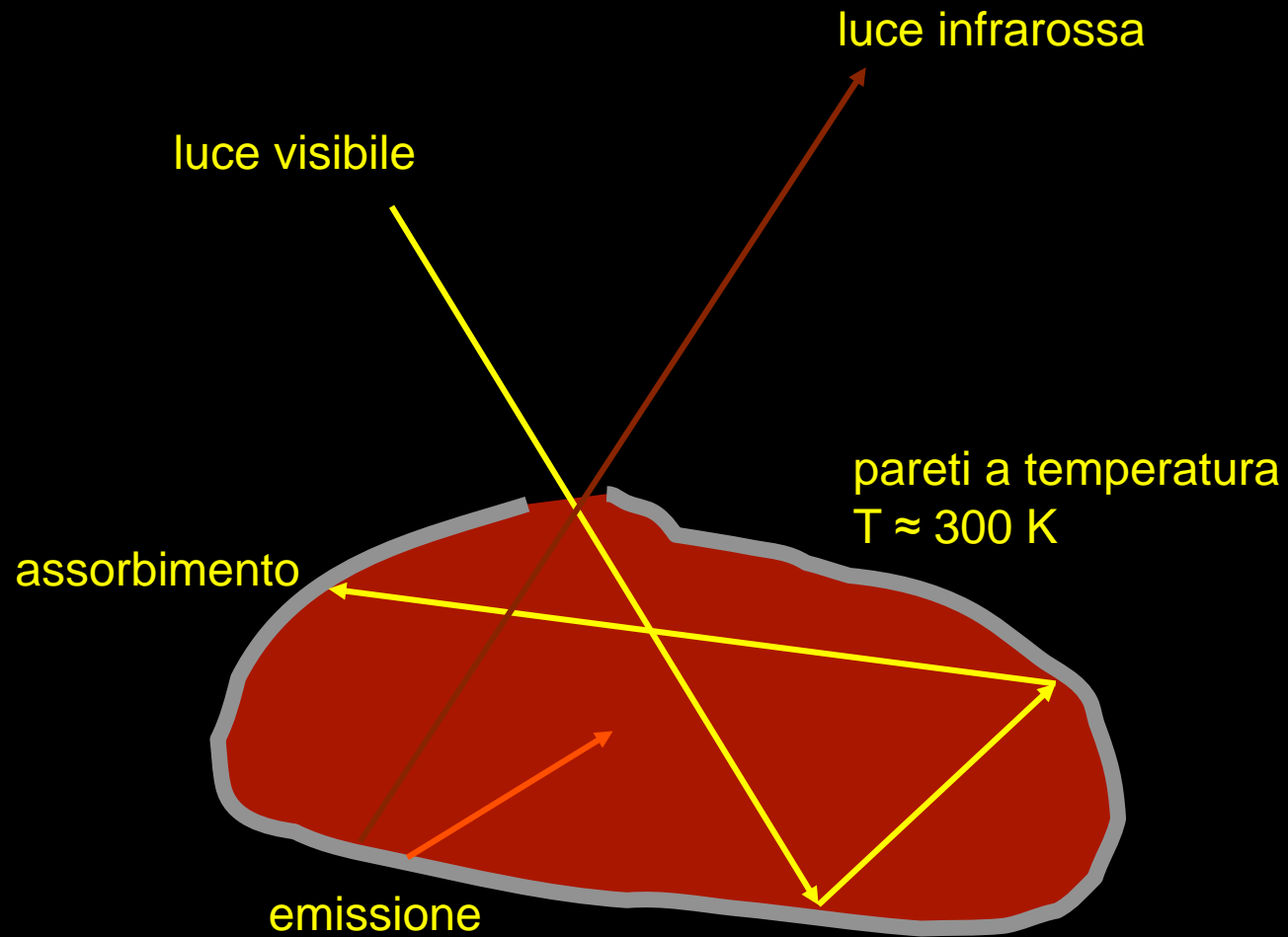


Il flusso lavico che scende dal cratere del vulcano Stromboli verso il mare (6 marzo 2007, foto di M. Fulle, <http://www.swisseduc.ch/stromboli/>).



foto dal sito http://www.powning.com/jake/home/j_homepg.shtml

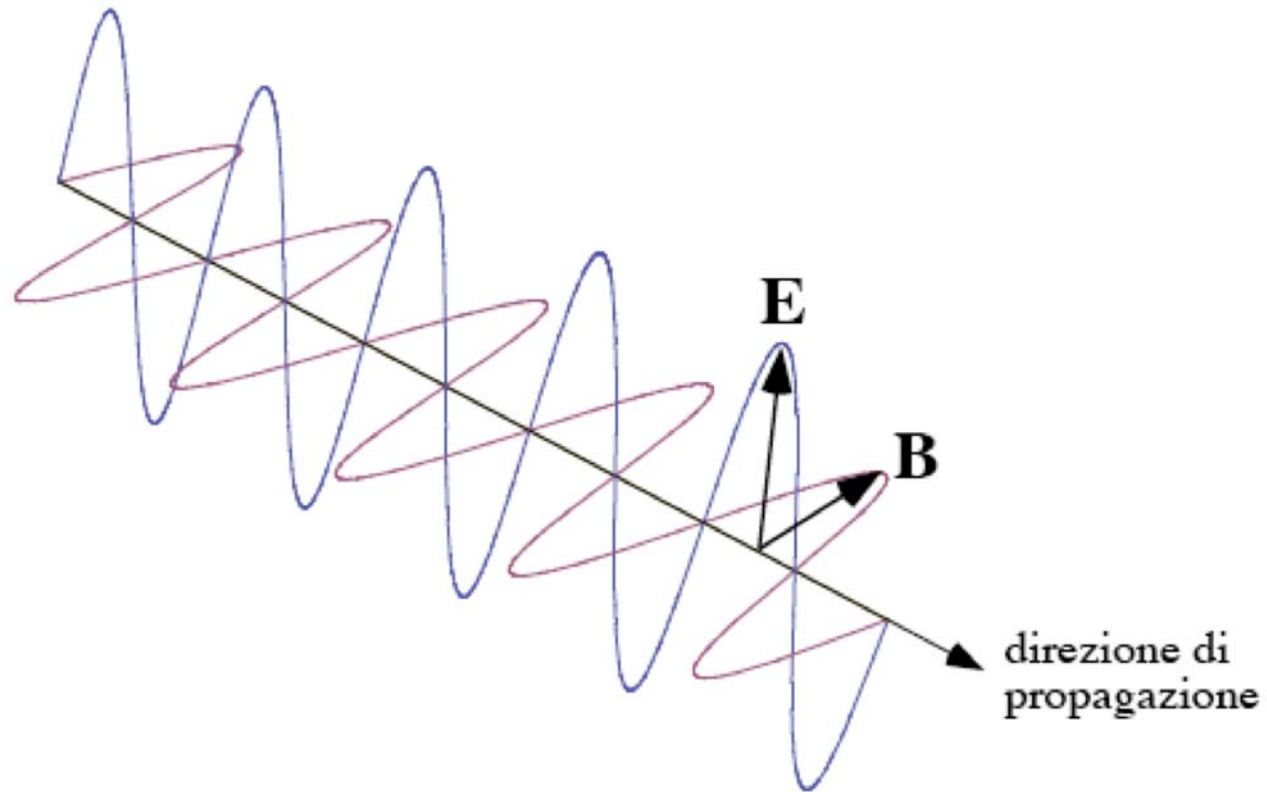
Corpo nero a temperatura ambiente



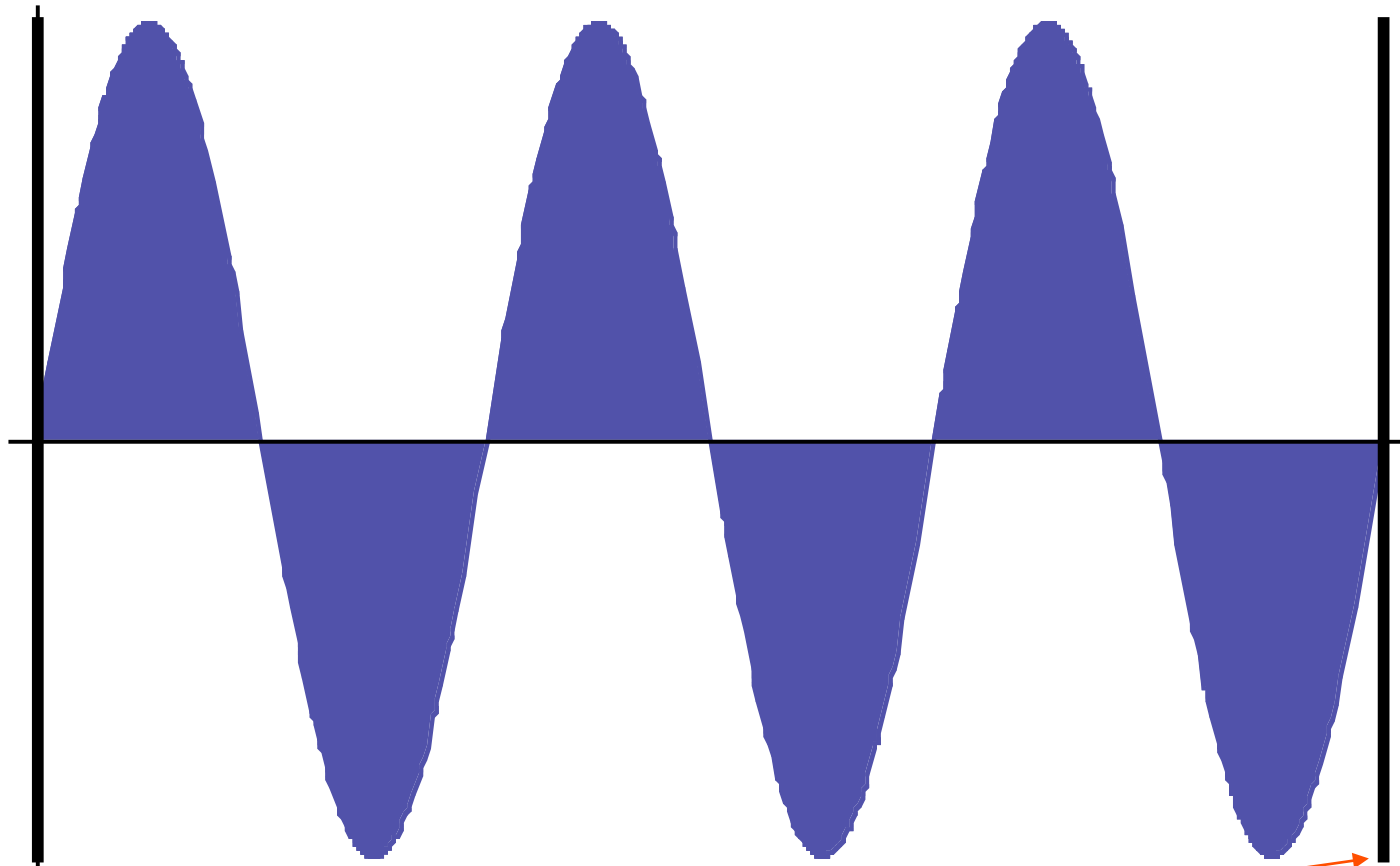


il colore di un corpo nero a diverse temperature

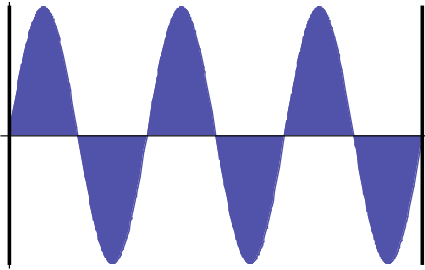
Onde elettromagnetiche



Onde elettromagnetiche in una cavità 1D



pareti della cavità



Ciò significa che la cavità può contenere solo un numero intero di mezze lunghezze d'onda, così che se L è la lunghezza della cavità, allora il campo stazionario contenuto nella cavità deve avere una lunghezza d'onda λ tale che

$$L = n\lambda / 2$$

dove n è un intero > 0

le frequenze permesse del campo elettrico sono date da

$$\nu = n \frac{c}{2L} = n\nu_0$$

e il numero di semionde all'interno della cavità è dato da

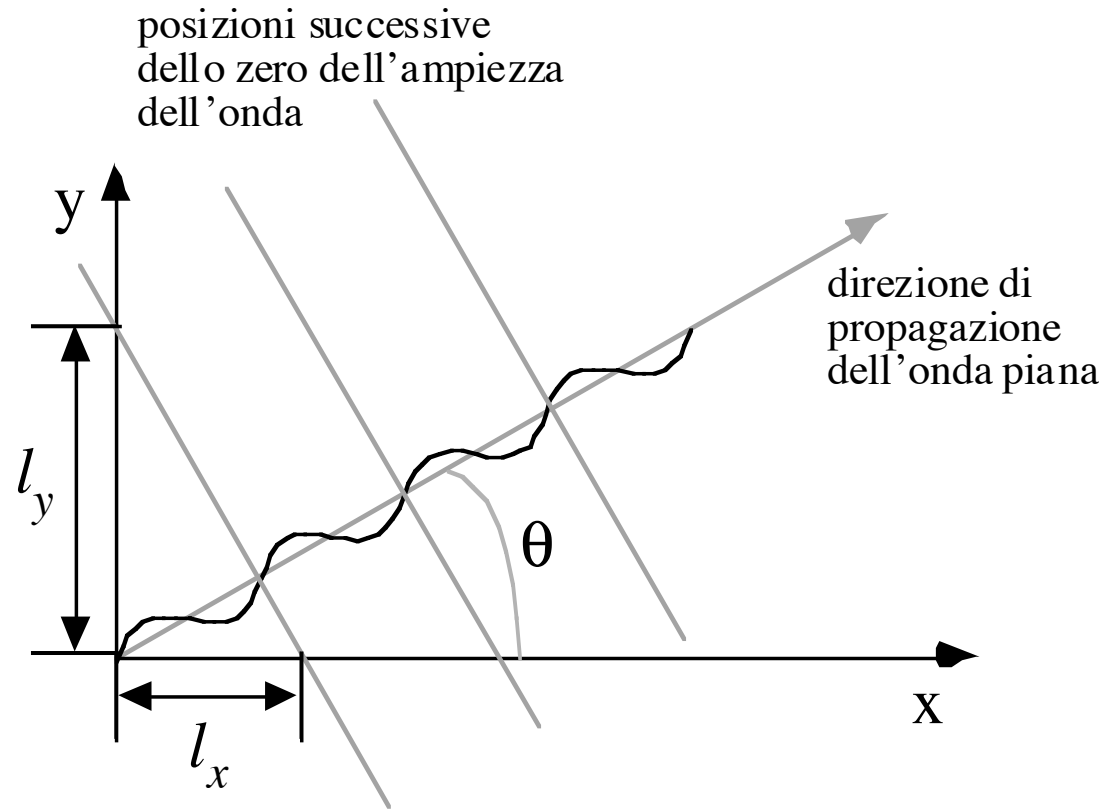
$$n = \frac{2L}{c} \nu$$

Le onde elettromagnetiche possono essere assimilate a oscillatori: ci sono due gradi di libertà, elettrico e magnetico, e tenendo conto anche della polarizzazione ogni frequenza contribuisce con $2kT$ all'energia media totale, quindi l'energia totale è

$$U = \sum_{n=1}^{n=\infty} 2kT \rightarrow \infty$$

È forse sbagliata l'approx. 1D ??? Proviamo a fare il calcolo in 3D !!!

Premessa al calcolo in 3D



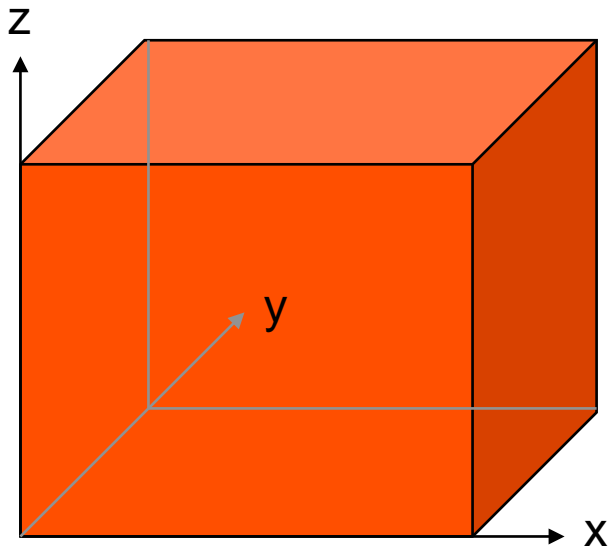
$$l_x = \lambda / \cos \theta \quad \text{periodo in direzione } x$$

$$l_y = \lambda / \sin \theta \quad \text{periodo in direzione } y$$

$$\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

consideriamo ora una scatola con lati L_x, L_y, L_z

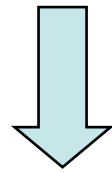
la condizione di periodicità deve valere separatamente per ciascuna direzione



$$\frac{2L_x}{l_x} = n_x; \quad \frac{2L_y}{l_y} = n_y; \quad \frac{2L_z}{l_z} = n_z$$

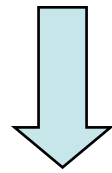
$$n_x \geq 0; \quad n_y \geq 0; \quad n_z \geq 0;$$

$$\frac{2L_x}{l_x} = n_x; \quad \frac{2L_y}{l_y} = n_y; \quad \frac{2L_z}{l_z} = n_z$$



$$\frac{1}{l_x} = \frac{n_x}{2L_x}; \quad \frac{1}{l_y} = \frac{n_y}{2L_y}; \quad \frac{1}{l_z} = \frac{n_z}{2L_z}$$

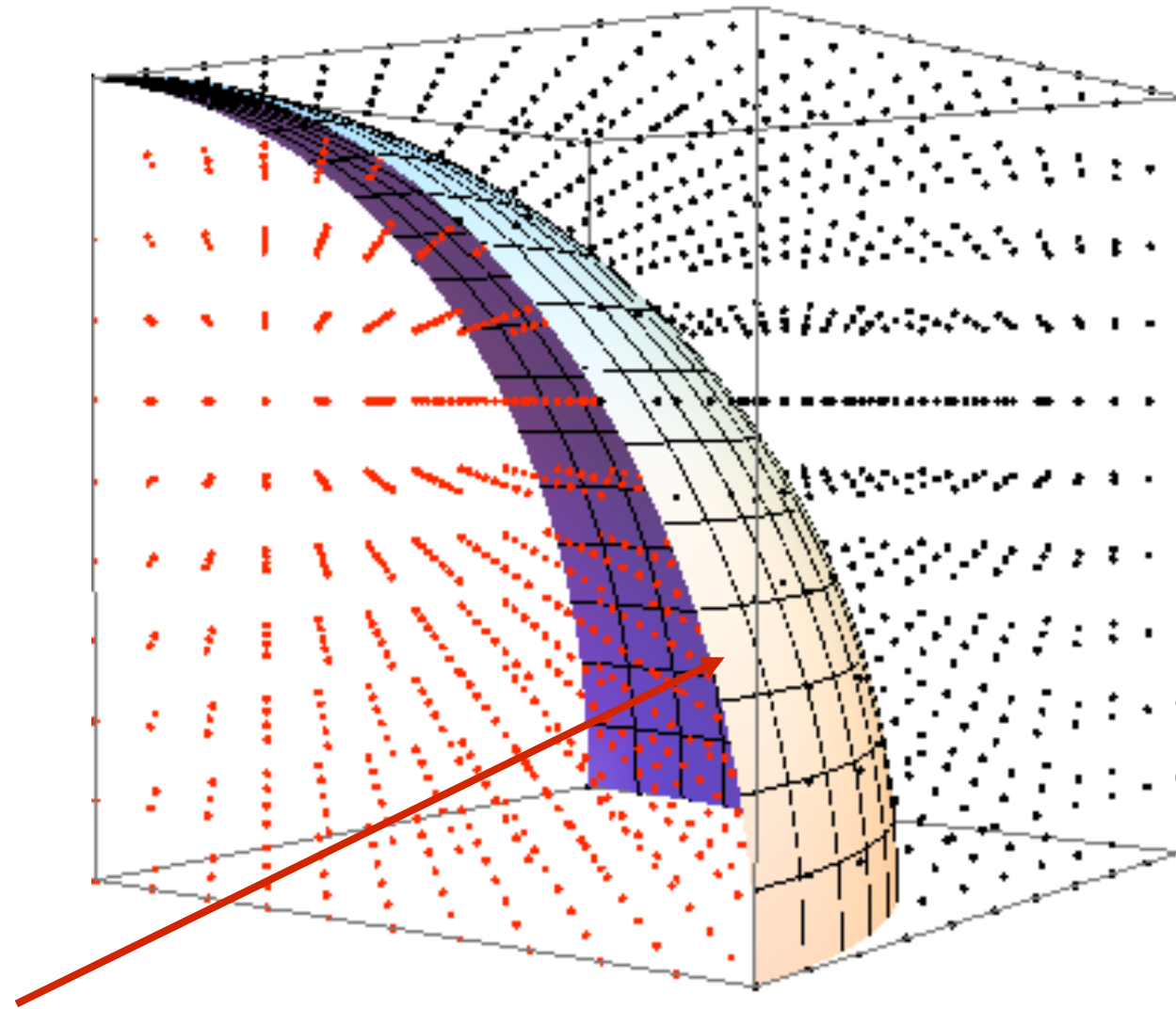
$$\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} + \frac{1}{l_z^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$



$$\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} = \frac{4}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2}$$



conteggio del numero dei modi di oscillazione permessi: sono quelli contenuti nell'ottante di ellissoide con assi $2\nu L_x/c, 2\nu L_y/c, 2\nu L_z/c$



questo guscio contiene i modi di oscillazione permessi

Volume dell'ottante di ellissoide in cui gli indici n non sono negativi

$$N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8v^3 L_x L_y L_z}{c^3} = \frac{4\pi V}{3c^3} v^3$$

(V = volume della cavità)

Quindi

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3} v^2 dv$$

$\Delta n = 1$ per ciascun indice, allora il volume occupato da ciascun modo nello spazio dei modi è $(\Delta n)^3 = 1$, allora

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

è anche il numero di modi nell'intervallo di frequenza
, e quindi la *densità di energia* è

energia media di
singolo modo

$$u(\nu)d\nu = 2kT \frac{dN}{V} = 2kT \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$
$$= \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu$$

eq. di Rayleigh e
Jeans

La densità di energia

$$u(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2$$

diverge alle alte frequenze, quindi il passaggio a 3D non ha risolto il problema.

Sperimentalmente non si osserva nessuna divergenza.

Come si può fare?

... e se il teorema di equipartizione in realtà non fosse sempre valido?

Il teorema si deriva classicamente facendo l'ipotesi che l'energia sia una quantità continua.

... e se l'energia fosse in realtà una quantità discreta?

Supponiamo ora che gli “oscillatori elettromagnetici” che entrano nel calcolo possano avere solo energie discretizzate

$$\mathcal{E}_n = nh\nu$$

Se il sistema è in equilibrio a temperatura T la sua energia media vale ($\beta = 1/kT$ è la temperatura inversa)

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} = \frac{-\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\beta h\nu} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \\ &= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}\end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad \text{energia media}$$

se $\beta h\nu = h\nu / kT \ll 1$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \approx \frac{h\nu}{1 + \beta h\nu - 1} = kT$$

e quindi ad alta temperatura si ritrova l'energia media di un singolo oscillatore

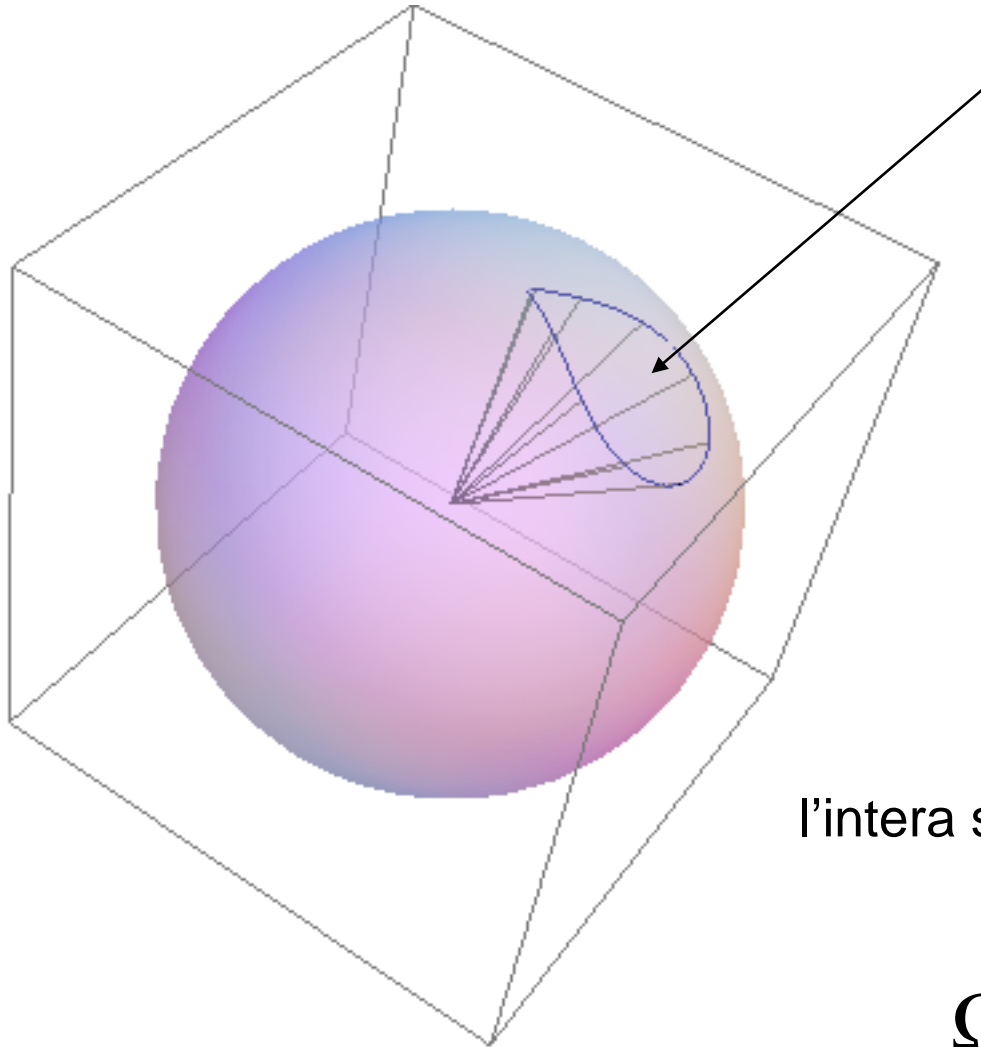
Nuova formula per la densità di energia

energia media di
singolo modo

$$u(\nu)d\nu = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{dN}{V} = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$
$$= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

La costante h introdotta da Planck è una delle costanti fondamentali della fisica, e vale circa $6.6 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Angoli in 3D: l'angolo solido



questa regione copre l'area A sulla superficie di una sfera di raggio R

l'angolo solido corrispondente è definito dalla formula:

$$\Omega = \frac{A}{R^2}$$

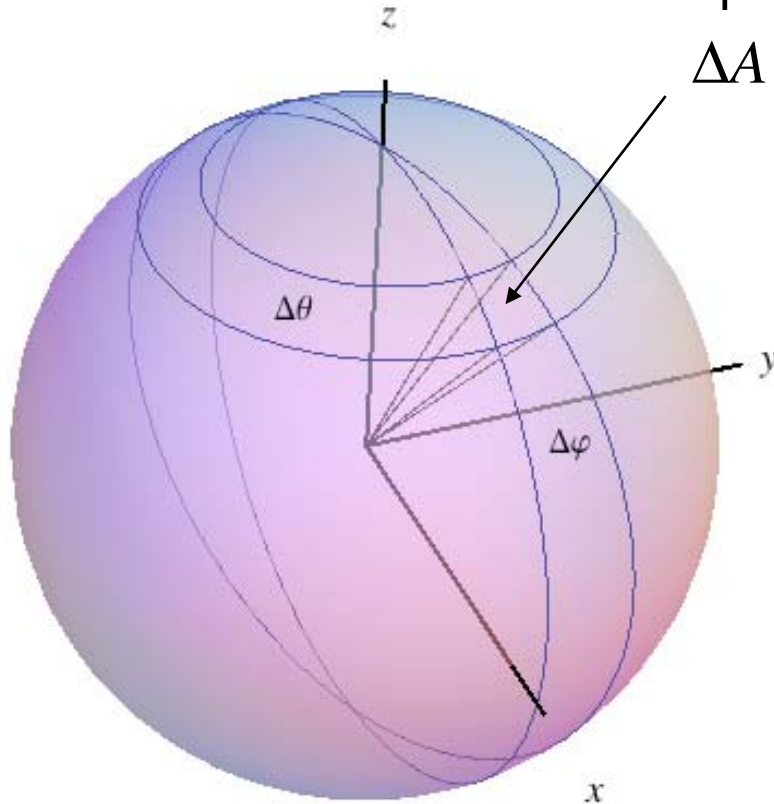
l'intera superficie della sfera corrisponde a

$$\Omega_{sfera} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Elemento di angolo solido in termini di angolo azimutale e angolo zenitale

quest'area vale approssimativamente

$$\Delta A \approx (R \sin \theta \Delta \varphi) \cdot (R \Delta \theta) = R^2 \Delta \varphi \sin \theta \Delta \theta$$

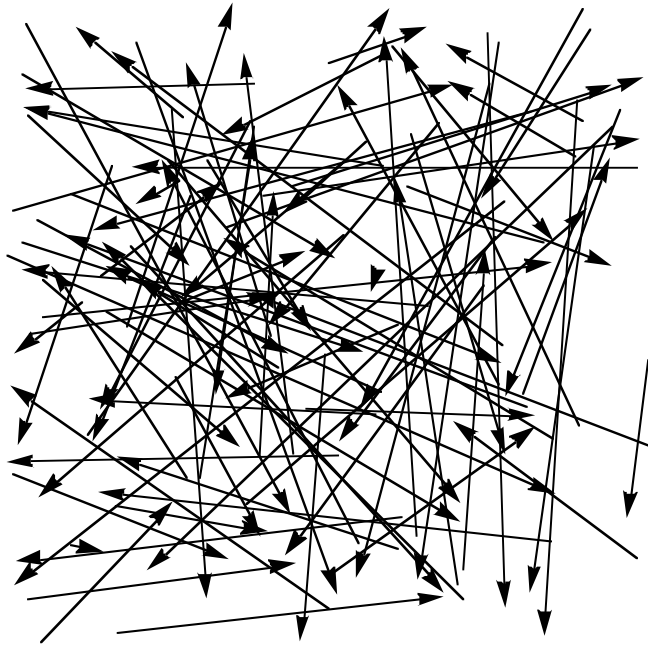


l'angolo solido elementare si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\varphi \sin \theta d\theta \\ &= -d\varphi d \cos \theta \end{aligned}$$

Potenza irradiata da una cavità a temperatura T

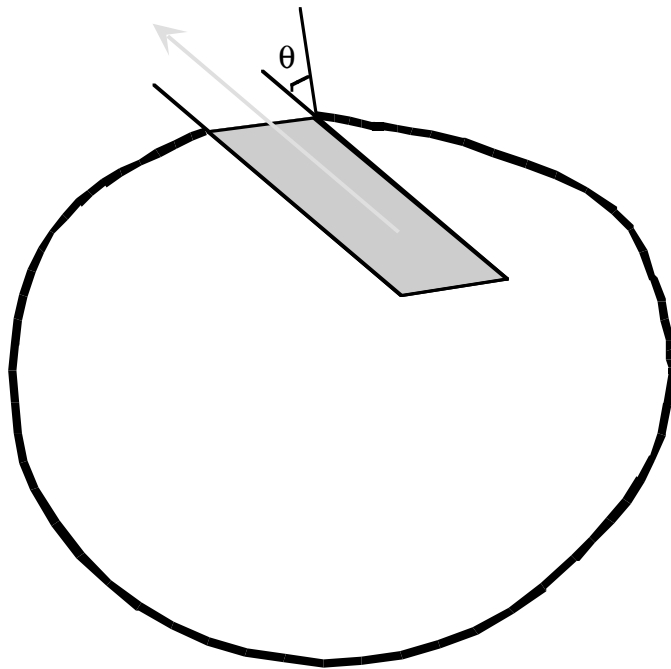
1. frazione della radiazione all'interno della cavità che si muove in una direzione che copre l'angolo solido $d\Omega$



tutte le direzioni sono equivalenti, quindi

$$dP = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

2. la radiazione che riesce ad uscire da un foro di sezione A con angolo di uscita nel tempo Δt è data dal calcolo seguente:



$$\text{altezza del cilindro} = c\Delta t \cos \theta$$

$$\text{volume del cilindro} = A c \Delta t \cos \theta$$

energia contenuta nel cilindro e
che si muove in direzione (θ, φ)

$$A c \Delta t \cos \theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} u(\nu) d\nu$$

quindi l'irradianza (potenza irradiata per unità di superficie) è

$$\begin{aligned} I(\Omega, \nu) d\nu d\Omega &= \frac{1}{A\Delta t} \cdot \left(A \cdot c\Delta t \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot u(\nu) d\nu \right) \\ &= c \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot u(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Integrando sugli angoli di uscita si ottiene l'irradianza in funzione della frequenza

in seguito all'integrazione sugli angoli resta solo la dipendenza dalla frequenza

$$I(\nu)d\nu = \int_{\Omega/2} \cos \theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot cu(\nu)d\nu = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos \theta d(\cos \theta) \cdot cu(\nu)d\nu$$
$$= \frac{c}{4} u(\nu)d\nu$$

ovviamente si integra solo su metà dell'angolo solido totale ...

Integrando su tutte le frequenze si trova l'irradianza del corpo nero

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} u(\nu) d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

quindi

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

costante di Stefan-Boltzmann