Edoardo Milotti
9/11/2009

Richiami relativi a lavoro, energia cinetica ed energia potenziale in meccanica

1. Introduzione di lavoro ed energia cinetica.

La definizione del lavoro elementare è la seguente:

$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Cominciamo ora a fare i calcoli in 1D, in modo da ridurre un po' la complessità. In questo caso possiamo scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = m\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{m}{2}v^2\right)$$

e quindi

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = F \cdot dx = dL$$

In 3D il procedimento è simile, anche se un po' più complicato; prendiamo anzitutto la componente x della forza

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left[\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] = m\mathbf{v}\cdot\nabla v_x$$

ripetendo il calcolo anche per le altre coordinate, vediamo che possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = m\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}mv^2\right); \qquad dL = d\mathbf{r}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

dove il gradiente nell'equazione intermedia va applicato a ciascuna delle componenti del vettore velocità.

La quantità $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

è detta energia cinetica, e dalle relazioni sopra si vede che $dL = dT$

2. Energia potenziale e conservazione dell'energia totale

L'introduzione del concetto di energia cinetica si dimostra importante quando è possibile definire la forza come la derivata (con il segno -) di una funzione detta energia potenziale. Allora le equazioni mostrano che l'energia totale (= energia cinetica + energia potenziale) si conserva. Questo principio di conservazione dell'energia è estremamente utile in molti casi sia teorici che pratici.

Anche in questo caso cominciamo esaminando il caso 1D:

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad \Rightarrow \quad dL = F \cdot dx = -\frac{dU}{dx}dx = -dU$$

D'altra parte possiamo scrivere anche

$$-dU = dT \quad \Rightarrow \quad dU + dT = 0 \quad \Rightarrow \quad d(T+U) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + U = \text{costante}$$

Questo stesso ragionamento può essere ripetuto in 3D:

$$F = -\nabla U \quad \Rightarrow \quad dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU$$

e uguagliando ancora una volta le due espressioni del lavoro elementare si trova lo stesso risultato visto sopra. Quindi l'energia totale $E = T + U$ si conserva (nel caso di un campo di forze conservativo derivabile da un potenziale: questo è vero per tutte le forze fondamentali della natura).