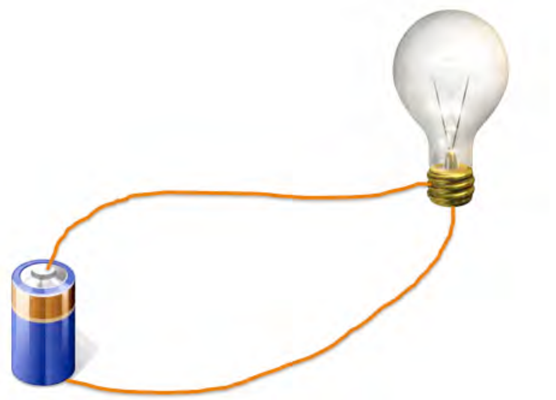
Edoardo Milotti
Novembre 2008

Nota sui circuiti in corrente continua

1. Introduzione

Una batteria, un paio di fili elettrici, una lampadina: questo è un esempio elementare di circuito elettrico



In generale un circuito elettrico è un percorso chiuso che include un generatore di tensione o di corrente, lungo il quale si muovono particelle cariche (di solito elettroni). I conduttori lungo i quali si muovono le cariche sono di solito fili metallici, ma possono essere anche conduttori metallici di forma diversa, oppure soluzioni saline o gas ionizzati. I fili elettrici sono caratterizzati dal fatto di avere una lunghezza molto più grande delle dimensioni trasverse del conduttore: si tratta quindi di strutture che possiamo trattare come se fossero unidimensionali.

La *tensione elettrica* è una generalizzazione del concetto di differenza di potenziale: nel contesto dei circuiti in corrente continua non c'è differenza tra tensione e differenza di potenziale, e in questa nota i termini sono usati indifferentemente (nei circuiti in corrente alternata la tensione comprende anche il concetto di *forza elettromotrice*)

2. Semplice modello fenomenologico della resistenza elettrica

In questo paragrafo sviluppiamo un semplicissimo modello fenomenologico del trasporto di carica da parte di elettroni in un filo conduttore metallico.

Prendiamo un elettrone che si muove in un conduttore, e supponiamo che l'elettrone sia sottoposto sia ad una forza costante (dovuta alla tensione applicata ai capi del conduttore), sia ad una specie di forza d'attrito (dovuta agli urti tra elettrone e l'ambiente che lo circonda). L'equazione del moto che comprende anche la forza di attrito è

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + q_e E$$

L'equazione è scritta in forma scalare e non vettoriale perché qui consideriamo i conduttori come oggetti "unidimensionali", e gli elettroni possono muoversi solo in avanti o indietro. Se V è la tensione applicata ai capi del conduttore, L è la lunghezza del conduttore e q è la carica dell'elettrone, allora l'intensità della forza (costante) che agisce su un elettrone dentro il conduttore è

$$q_e E = \frac{q_e V}{L}.$$

L'equazione si risolve facilmente, infatti l'equazione omogenea è

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v$$

la cui soluzione si trova con una semplice separazione delle variabili, ed è $v = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)$, e inoltre una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $v_{eq} = \frac{q_e V}{\gamma L}$: infine la soluzione completa è

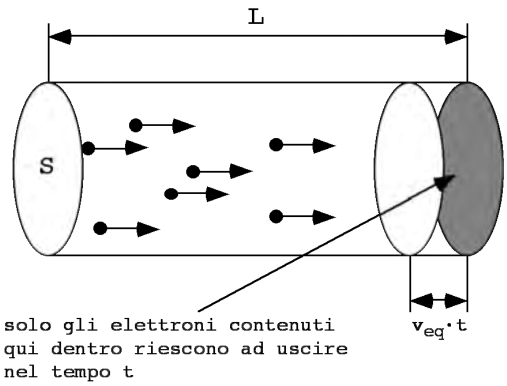
$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{q_e V}{\gamma L}$$

dove v_0 è una costante che viene determinata dalle condizioni iniziali.

La soluzione trovata mostra che dopo un'accelerazione iniziale, l'elettrone raggiunge la velocità di equilibrio

$$v_d = \frac{q_e V}{\gamma L}$$

Il conduttore però non contiene un solo elettrone, ne contiene tanti: supponiamo che ne contenga N per unità di volume.



Quando facciamo passare corrente nel conduttore c'è un campo elettrico che trascina gli elettroni, li fa entrare ad una estremità del conduttore e li fa uscire all'altra estremità. In un dato tempo t gli elettroni percorrono la distanza $v_d \cdot t$, per cui escono dal conduttore tutti quelli che sono a distanza minore o uguale a $v_d \cdot t$ dall'estremità di uscita.

Se il conduttore ha una sezione S la regione che contiene gli elettroni che riescono ad uscire ha un volume $S \cdot v_d \cdot t$, e poiché ci sono N elettroni per unità di volume, gli elettroni che riescono ad uscire sono $N \cdot S \cdot v_d \cdot t$. Inoltre ciascun elettrone porta con sé una carica q_e, e quindi nel tempo t la carica totale che esce è $q_e \cdot N \cdot S \cdot v_d \cdot t$.

La definizione di corrente elettrica I è la seguente:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

e l'unità di corrente nel sistema MKS è l'Ampere (A): 1 A = (1 Coulomb)/(1 s).

Allora dal risultato che abbiamo ottenuto sopra troviamo la corrente elettrica I:

$$I = q \cdot N \cdot S \cdot v_d = \frac{NSq_e^2}{\gamma L} V$$

Quest'ultima formula può venir anche riscritta nella forma:

$$V = \left\{ \left(\frac{\gamma}{Nq_e^2} \right) \cdot \left(\frac{L}{S} \right) \right\} \cdot I = R \cdot I$$

e questa è la formulazione usuale della legge di Ohm $V=R \cdot I$, dove R è la *resistenza* del conduttore. Questa derivazione ci mostra anche com'è correlata la resistenza R ai parametri del modello:

$$R = \left(\frac{\gamma}{Nq_e^2} \right) \cdot \left(\frac{L}{S} \right) = \rho \cdot \left(\frac{L}{S} \right)$$

La costante R si chiama resistenza del conduttore e si misura in Ohm (Ω). Si noti che $1\ \Omega$ = (1 Volt)/(1 Ampere) = (1 Volt)·(1 secondo)/(1 Coulomb).

La quantità ρ è una caratteristica del materiale di cui è fatto il filo conduttore, e si chiama *resistività*. La tabellina che segue dà le resistività di alcuni solidi metallici a temperatura ambiente (293 ˚K)

materiale	resistività ($10^{-8}\ \Omega\cdot$m)	α (10^{-4} ˚K^{-1})
acciaio inossidabile	96.	6.
alluminio	2.65	40.
argento	1.6	40.
bronzo (90% rame, 10% stagno)	30.	
bronzo fosforoso	7.	60.
costantana	47.	0.4
ferro	10.	65.
manganina	45.	0.1
oro	2.4	34.
ottone (70% rame, 30% zinco)	~ 8.	~15.
rame	1.7	39.
stagno	11.	50.
titanio	53.	38.
zinco	5.9	40.

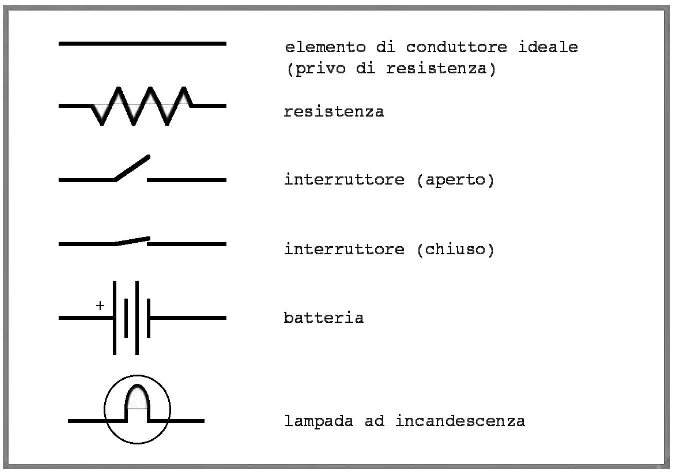
In aggiunta a metalli puri la tabella contiene anche alcune leghe. La costantana e la manganinasono due leghe utilizzate per costruire resistenze a filo metallico. Una ragione per utilizzare queste due leghe è la resistività abbastanza elevata rispetto a quella di altri solidi metallici, così che non si devono usare dei conduttori eccessivamente lunghi per produrre delle resistenze di valore elevato, ma c'è anche un altro motivo che suggerisce l'impiego di questi materiali. La resistività di tutti i conduttori varia al variare della temperatura: la caratteristica notevole della costantana ed ancor più della manganina è quella di avere resistività che cambiano di pochissimo al variare della temperatura.

3. Elementi circuitali

Il dispositivo che produce una tnesione nota ed indipendente dal circuito esterno e che permette un flusso continuo di carica si chiama *generatore di tensione*[1].

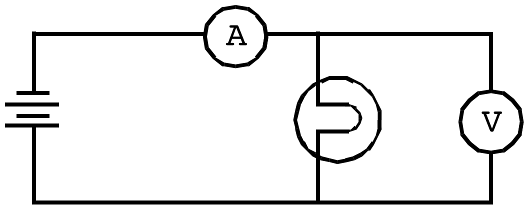
[1]Oltre ai generatori di tensione ci sono anche i *generatori di corrente*, che producono una corrente nota ed indipendente dal circuito esterno. Il generatore di tensione ideale è un dispositivo che produce una certa tensione ed è privo di resistenza interna. Un generatore di corrente invece produce una certa corrente ed ha resistenza interna infinita.

Il generatore di tensione ed il filo elettrico sono degli *elementi circuitali*, e quando si mettono insieme diversi elementi circuitali in modo da produrre un percorso chiuso per le cariche, si costruisce un *circuito elettrico*.
La figura seguente mostra i simboli relativi ad alcuni comuni elementi circuitali

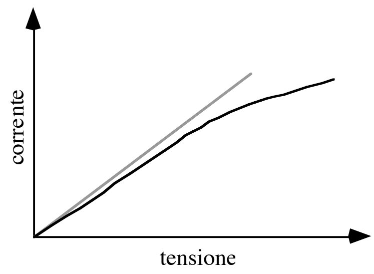


4. Curva caratteristica di una lampadina ad incandescenza

La legge di Ohm è un caso particolare di caratteristica tensione-corrente, vale a dire della legge che lega la tensione alla corrente che scorre in un certo componente elettrico. Una lampadina ad incandescenza non obbedisce alla legge di Ohm: in una lampada ad incandescenza la legge di Ohm viene rispettata solo per tensioni e correnti piuttosto basse, mentre viene violata quando la lampada emette luce. Per misurare la curva caratteristica della lampadina si costruisce il circuito mostrato in figura in cui i simboli A e V denotano rispettivamente un amperometro e un voltmetro



Un componente elettrico come una resistenza o una lampadina ad incandescenza è caratterizzato dalla cosiddetta curva caratteristica o curva tensione-corrente. La curva tensione-corrente per una normale resistenza è mostrata nella figura seguente (linea retta segnata in grigio):



Il filo metallico della lampadina si comporta come quella di una normale resistenza alle basse temperature (quando la lampadina non è ancora incandescente) e poi inizia a curvare (curva nera nella figura sopra). In un caso come questo non si può definire una resistenza, ma si possono invece dare la resistenza media e soprattutto la resistenza dinamica, che è data da

$$R_d = \frac{dV}{dI}$$

• Domande

1. I filamenti delle lampadine ad incandescenza sono fatti di tungsteno. Perché?

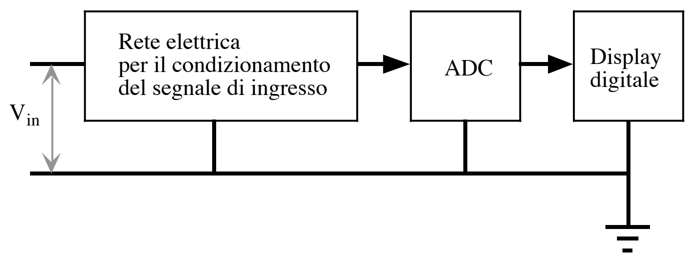
2. Perché il vetro delle lampadine ad incandescenza molto usate è un po' annerito internamente? Perché l'annerimento è maggiore in quella parte della lampadina che sta più in alto?

3. Qual è la differenza tra una normale lampada ad incandescenza ed una lampada alogena?

4. Sulle lampadine non è riportato mai il valore della resistenza, ma piuttosto il valore della tensione di funzionamento e di un'altra quantità, che può essere la corrente I, oppure il prodotto V·I. Perché?

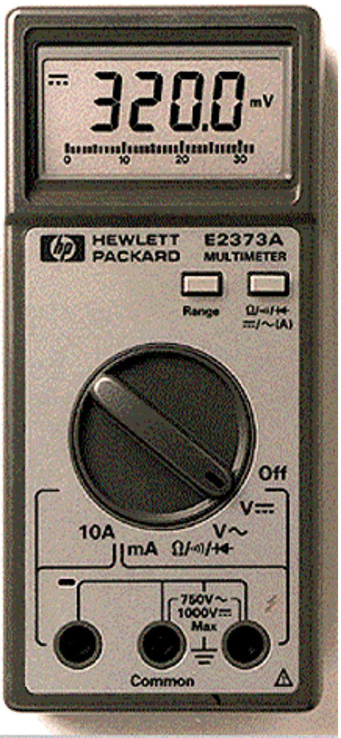
5. I multimetri

Per poter effettuare la misura è necessario conoscere gli strumenti che si utilizzano per le misure elettriche. Gli strumenti che misurano la tensione si chiamano *voltmetri*, quelli che misurano la corrente si chiamano *amperometri* e quelli che misurano la resistenza si chiamano *ohmetri*, ma è più frequente trovare questi strumenti riuniti in un unico oggetto che si chiama *multimetro* o *tester*.
La figura seguente mostra lo schema di base del funzionamento di un voltmetro moderno:



Il cuore del voltmetro è l'ADC: ADC sta per Analog-to-Digital Converter (convertitore analogico-digitale) e si tratta di un circuito elettronico, che qui non trattiamo nei dettagli, che converte una tensione continua in un insieme di segnali digitali[2] che rappresentano un numero binario. Questi segnali digitali vengono poi inviati ad un display che contiene dei circuiti logici e uno schermo per la rappresentazione dei numeri. La rete elettrica di condizionamento che si trova all'ingresso serve a cambiare il fondoscala del voltmetro e a modificarlo in modo da utilizzarlo come amperometro o ohmetro: se ad esempio si fa passare la corrente esterna attraverso una resistenza nota e si misura la tensione ai capi di questa resistenza, allora si può utilizzare la legge di Ohm per ricavare il valore della corrente dalla tensione misurata. Analogamente se lo strumento contiene una batteria di tensione nota allora si può ottenere una misura di resistenza per mezzo di una misura della corrente che viene estratta da questa batteria interna.

Ci sono molti tipi di multimetri digitali che però – almeno al livello di base – hanno approssimativamente tutti le stesse caratteristiche: ecco un esempio di semplice multimetro digitale prodotto dalla Hewlett-Packard:



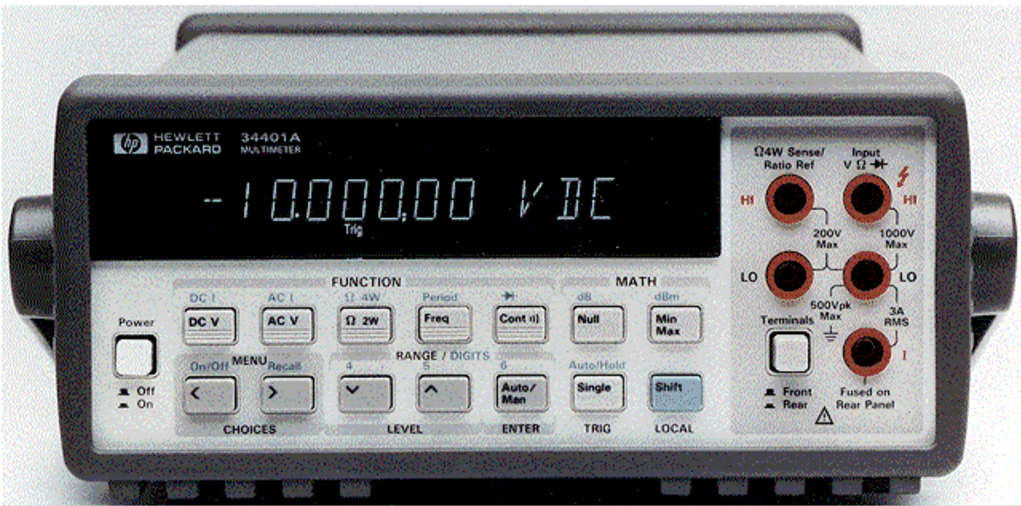
HP E2373A Handheld Digital Multimeter

L'interruttore rotante centrale serve a selezionare il modo di funzionamento del multimetro (**Off** multimetro spento; **V=** misura di tensione in corrente continua; **V~** misura di tensione in corrente alternata; **Ω/...** misura di resistenza/beeper/prova-diodi; **mA** misura di corrente con fondoscala

[2] dall'inglese *digit* che significa cifra. I segnali digitali si utilizzano per rappresentare numeri interi all'interno dei moderni sistemi di calcolo ed in molta strumentazione scientifica. Gli strumenti digitali sono sempre strumenti che convertono quasi immediatamente un segnale analogico in un segnale digitale, e poi svolgono tutta la successiva elaborazione su questo segnale digitale.

automatico; **10A** misura di corrente con fondoscala a 10A). Le tre boccole sono così suddivise: **COMMON** va sempre connessa, mentre per le misure di tensione o di resistenza si usa la boccola di destra, e per le misure di corrente quella di sinistra. Il bottone range serve a cambiare il valore di fondoscala, e il bottone **Ω/...** serve a selezionare la funzione ohmetro/beeper/prova-diodi. Quando il multimetro si trova nel modo beeper esso serve a controllare se c'è un collegamento elettrico tra due terminali: se la resistenza tra i puntali è bassa allora il multimetro emette un suono acuto.
Quando si effettuano delle misure con uno strumento come questo, le cifre rappresentate sul display non hanno un'ovvia significatività. La significatività delle cifre rappresentate dallo strumento va ricavata dal foglio di specifiche dello strumento, ad esempio in questo caso l'accuratezza[3] per le tensioni continue è 0.7%.
Si noti che su molti strumenti le misure in corrente continua sono indicate dalla sigla DC (= Direct Current), mentre le misure in corrente alternata (cioè con una legge di variazione sinusoidale) sono indicate dalla sigla AC (= Alternating Current).

La figura seguente mostra invece uno strumento molto più accurato, costruito sempre dalla Hewlett-Packard. Questo multimetro può effettuare anche misure di frequenza e periodo, ed è collegabile ad un sistema di acquisizione dati basato sullo standard IEEE-488.



HP 34401A Benchtop Digital Multimeter

[3] Si ricordi che l'errore su una misura è costituito da due parti, l'errore casuale e l'errore sistematico. L'errore casuale è associato ad una distribuzione di probabilità ed è in generale tanto maggiore quanto più grande è la varianza di questa distribuzione. L'errore sistematico è un valore medio ignoto che viene sommato a tutte le misure. Uno strumento preciso è uno strumento in cui l'errore statistico ha una varianza piccola. Uno strumento accurato è uno strumento che ha un piccolo errore sistematico. Le specifiche riportate utilizzano una definizione un po' diversa dell'accuratezza, ed accettata nell'industria, secondo cui l'accuratezza va interpretata come una combinazione di errore casuale ed errore sistematico.

6. Leggi di Kirchhoff

Un circuito elettrico che si chiude su se stesso si chiama *maglia*. Un punto da cui si dipartono tre o più conduttori si chiama *nodo*. Un tratto di conduttore si chiama *ramo* del circuito.

Per la conservazione dell'energia, la somma delle variazioni di energia per unità di carica associate a ciascun componente lungo una maglia deve annullarsi, e quindi in simboli:

$$\sum_{<maglia>} \Delta V_i = 0$$

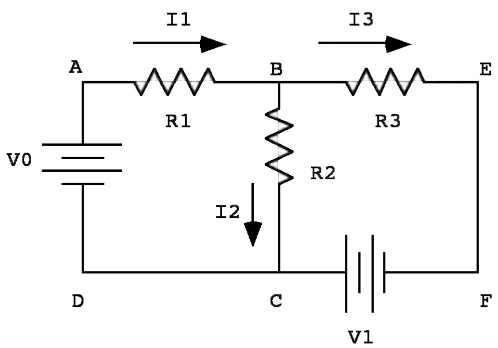
(legge di Kirchhoff per le tensioni)

Inoltre si sa sperimentalmente che la carica elettrica si conserva in ogni processo fisico e quindi la carica che entra in un nodo nell'unità di tempo deve essere uguale a quella che esce nello stesso tempo, e questo equivale a dire che la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo si deve annullare: otteniamo così la legge di Kirchhoff per le correnti:

$$\sum_{<nodo>} I_i = 0$$

(legge di Kirchhoff per le correnti)

A titolo di esempio analizziamo il circuito mostrato nella figura seguente,



Il lavoro fatto per spostare una carica lungo il percorso (o *maglia*) ABCDA è uguale all'energia ceduta dal generatore, e quindi la somma delle tensioni relative a ciascun tratto (o *ramo*) di circuito (AB, BC, CD, DA) è uguale alla tensione ai capi del generatore. Utilizzando la legge di Ohm possiamo scrivere: ΔV_{AB} = I1·R1; ΔV_{BC} = I2·R2; e quindi V0 = I1·R1+I2·R2. Analoghe considerazioni si possono fare per le altre due maglie.

Inoltre la carica che entra nel nodo B nel tempo Δt è data dalla somma delle cariche provenienti dai tre rami AB, BC e BE e deve essere nulla, perché non c'è modo di accumularla nel nodo e la carica totale si conserva, cioè $\Delta Q1+\Delta Q2+\Delta Q3$ = 0, e quindi, dividendo per Δt, *I1-I2-I3* = 0 (con la convenzione di segno mostrata nella figura *I1* entra nel nodo, mentre *I2* e *I3* ne escono)

Le tensioni dei generatori sono note: vediamo dunque come si procede per calcolare le correnti. Nel caso del circuito mostrato in figura possiamo scrivere le equazioni:

$$\begin{array}{rl}
V0 = I1 \cdot R1 + I2 \cdot R2 & \text{maglia ABCDA} \\
V1 = I3 \cdot R3 - I2 \cdot R2 & \text{maglia BEFCE} \\
V0 + V1 = I1 \cdot R1 + I3 \cdot R3 & \text{maglia ABEFCDA} \\
I1 = I2 + I3 & \text{nodo B} \\
I2 + I3 = I1 & \text{nodo C}
\end{array}$$

Poiché ci sono tre maglie e due nodi e quindi si possono scrivere 5 equazioni. D'altra parte ci sono solo tre variabili indipendenti, ed in effetti si vede che ci sono solo tre equazioni indipendenti, che si possono scrivere in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} R1 & R2 & 0 \\ 0 & -R2 & R3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione di questo sistema lineare è:

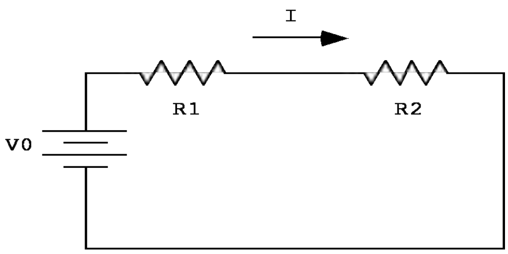
$$\begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \frac{1}{R3 \cdot (R1 + R2) + R1 \cdot R2} \cdot \begin{pmatrix} R3 \cdot V0 + R2 \cdot V0 + R2 \cdot V1 \\ R3 \cdot V0 - R1 \cdot V1 \\ R2 \cdot V0 + V1 \cdot (R1 + R2) \end{pmatrix}$$

Si noti che abbiamo assunto che i generatori di tensione siano ideali e quindi privi di resistenza interna.

Come si è visto il generatore di tensione fornisce energia, mentre le resistenze l'assorbono, con il risultato che si scaldano: ora è facile calcolare la potenza ceduta dal generatore alle resistenze. Supponiamo che ai capi di una resistenza R ci sia una tensione V e che passi una corrente I. Allora perché una carica ΔQ attraversi la resistenza è necessario fare un lavoro $\Delta L = \Delta Q \cdot V$, e quindi per un tempo di transito Δt è necessario che la potenza sia $W = \Delta L/\Delta t = (\Delta Q/\Delta t) \cdot V = I \cdot V$. Inoltre, se vale la legge di Ohm possiamo anche scrivere $W = I^2 \cdot R$ o $W = V^2/R$.

7. Applicazioni: reti di resistenze in serie, parallelo, partitori di tensione e ponte di Wheatstone

- Circuito con due resistenze in serie

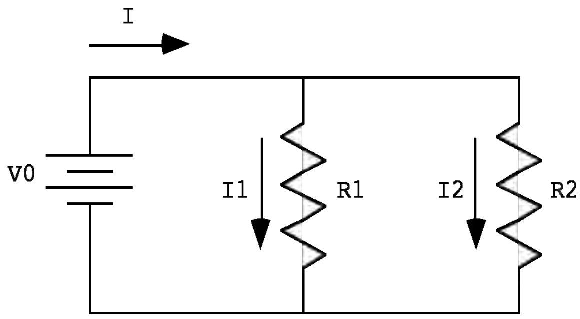


In questo caso c'è solo una maglia e non ci sono nodi, perciò c'è solo l'equazione di maglia

$$V0 = I \cdot R1 + I \cdot R2 = I \cdot (R1 + R2)$$

allora $I = V / (R1 + R2)$, e il circuito si comporta come se fosse un circuito con unica resistenza equivalente R = R1+R2.

- Circuito con due resistenze in parallelo

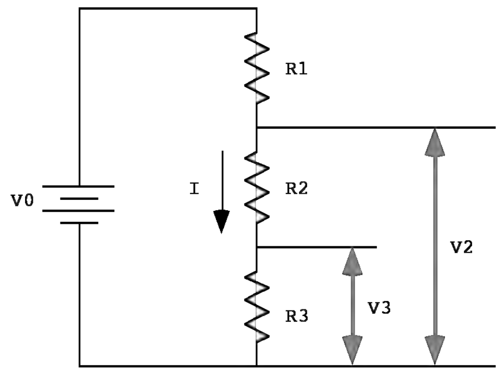


In questo caso ci sono tre maglie, di cui però solo due sono indipendenti, e inoltre ci sono due nodi, di cui però solo uno è indipendente, allora le equazioni sono

$$\begin{cases} I = I1 + I2 \\ V0 = I1 \cdot R1 \\ V0 = I2 \cdot R2 \end{cases}$$

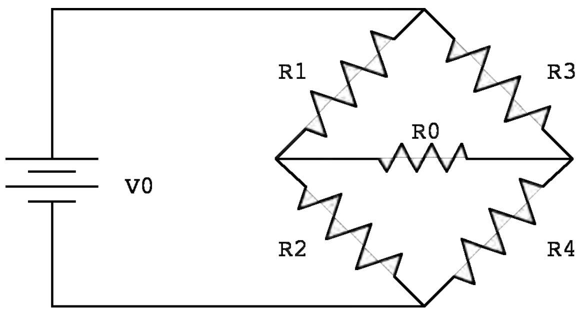
allora $I = V0 \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \right)$, e la resistenza equivalente è $R = \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \right)^{-1}$.

- *Partitore di tensione*: è una rete con diverse resistenze in serie utilizzata per scalare la tensione di un generatore di tensione. Nell'esempio riportato in figura V2 = V0·(R2+R3)/(R1+R2+R3) e V3 = V0·R3/(R1+R2+R3).



I partitori di tensione sono dei circuiti estremamente semplici, che però trovano vaste applicazioni come componenti di circuiti più complessi.

- *Ponte di Wheatstone*: è facile dimostrare che quando è soddisfatta la condizione R1/R2 = R3/R4 non passa corrente nel ramo centrale.



Infatti, quando il ponte è bilanciato perfettamente è equivalente a due partitori di tensione in parallelo, con le tensioni dei punti intermedi che sono esattamente uguali: quindi deve valere la relazione

$$\frac{R2}{R1+R2}=\frac{R4}{R3+R4}$$

da cui si ricavano le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}&R2(R3+R4)=R4(R1+R2)\\&R2\cdot R3=R1\cdot R4\\&\frac{R1}{R2}=\frac{R3}{R4}\end{aligned}$$

In particolare se una delle resistenze non è nota – per esempio R4 – allora si può utilizzare la condizione di bilanciamento per misurarla:

$$R4 = \frac{R2 \cdot R3}{R1}$$

In questo modo il ponte di Wheatstone può essere usato per misurare anche resistenze molto piccole e difficilmente misurabili con altre tecniche: basta avere una resistenza campione piccola (R3), e due resistenze – anche di valore alto –regolabili e facilmente misurabili.
Si noti anche che se R0 ha un valore molto più grande di quello delle altre resistenze, la differenza di potenziale ai capi di R0 è semplicemente

$$\Delta V = \left(\frac{R2}{R1 + R2} - \frac{RX}{R3 + RX} \right) V$$

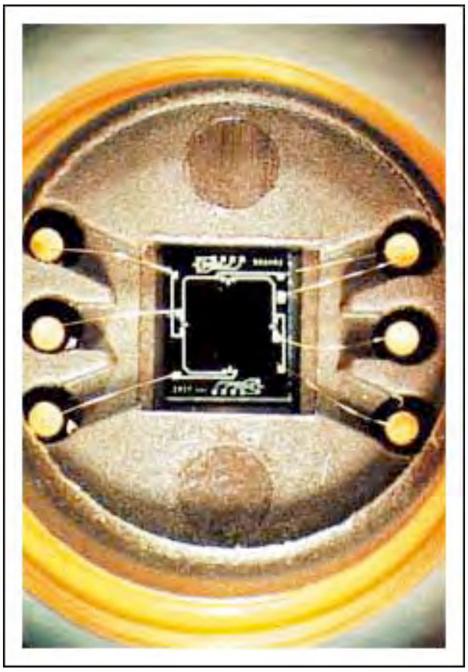
dove si è utilizzato il simbolo RX per indicare il valore della resistenza R4 fuori dalla condizione di bilanciamento del ponte. Se si pone $RX = R4 + \Delta R$ (R4 = valore corrispondente al ponte bilanciato, $\Delta R \ll R4$), si trova

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \left(\frac{R2}{R1 + R2} - \frac{R4 + \Delta R}{R3 + R4 + \Delta R} \right) V \approx \left[\frac{R2}{R1 + R2} - \frac{R4 + \Delta R}{R3 + R4} \left(1 - \frac{\Delta R}{R3 + R4} \right) \right] V \\
&\approx \left[\frac{R2}{R1 + R2} - \frac{R4}{R3 + R4} - \frac{\Delta R}{R3 + R4} + \frac{R4 \cdot \Delta R}{(R3 + R4)^2} \right] V \\
&= -\frac{R3}{(R3 + R4)^2} V \cdot \Delta R
\end{aligned}$$

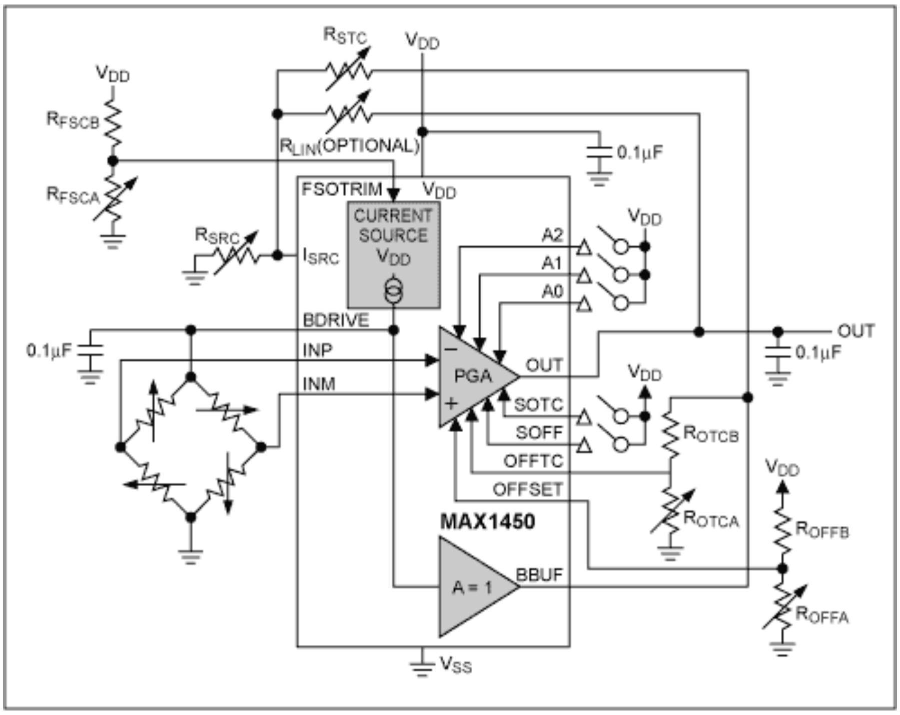
Questa formula mostra che una piccola variazione di resistenza produce una variazione di tensione: in altre parole questo è un modo per convertire una piccola variazione di resistenza in una variazione di tensione che è direttamente proporzionale. Si può ottenere il valore della variazione di resistenza dalle quantità misurate invertendo l'ultima formula:

$$\Delta R = -\frac{(R3 + R4)^2}{R3} \frac{\Delta V}{V}$$

Questa tecnica viene utilizzata nei moderni sensori a stato solido, ad esempio nei sensori di pressione a stato solido, costruiti con tecniche micromeccaniche su substrato di silicio. In questi sensori la variazione di resistenza è prodotta dalla deformazione meccanica di una membrana di silicio che è anche una parete di una camera a vuoto. I moderni sensori contengono un ponte di Wheatstone (in cui non solo una ma tutte e quattro le resistenze del ponte cambiano a coppie), e l'elettronica che serve ad amplificare la piccola variazione di tensione. La figura seguente mostra un sensore di questo tipo costruito dalla MAXIM



Nel diagramma elettrico di questo sensore è facile individuare il ponte di Wheatstone che costituisce la parte sensibile



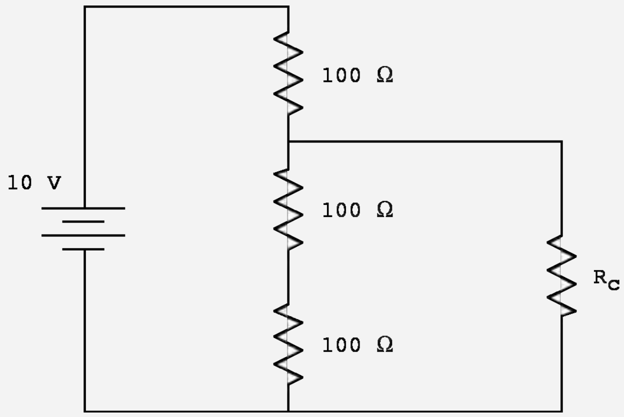
• Domande ed esercizi

1. Calcolare la resistenza equivalente per n resistenze in serie e per n resistenze in parallelo.

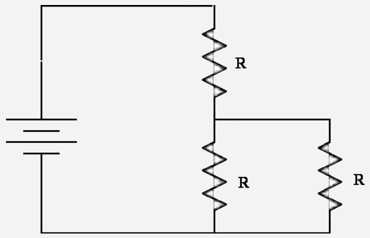
2. Fare una trattazione completa del ponte di Wheatstone, trovare cioè le correnti che fluiscono nei diversi rami per valori arbitrari di resistenza, e non solo nel caso in cui la corrente in R0 si annulla.

3. Trovare la potenza dissipata nelle sezioni del partitore di tensione.

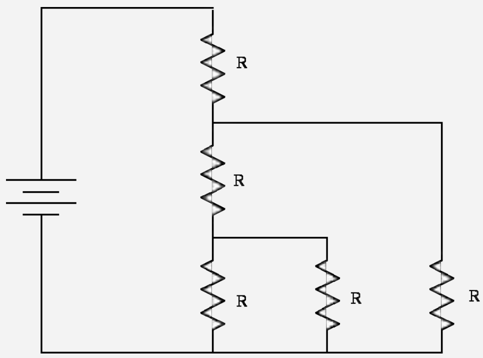
4. Studiare il comportamento del partitore mostrato qui sotto in funzione del valore della resistenza di carico R_C. Dimostrare che quando la resistenza di carico è molto minore di 100 Ω il comportamento del partitore viene modificato in modo rilevante.



5. Trovare la resistenza equivalente dei seguenti circuiti:



a.



b.

Chiamiamo $R(1)$ la resistenza equivalente nel caso a. e $R(2)$ la resistenza equivalente nel caso b. Come si può generalizzare il circuito? Se $R(n)$ è la resistenza equivalente dell'n-esimo circuito, come si scrive $R(n+1)$ in funzione di $R(n)$? Qual è il valore limite di R(n) per n che tende all'infinito?

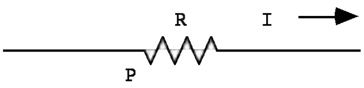
8. Utilizzo di voltmetri ed amperometri

I più comuni strumenti per misure elettriche sono:

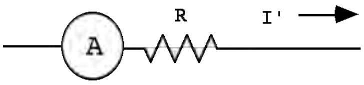
• il voltmetro	per misurare tensioni
• l'amperometro	per misurare correnti
• l'ohmetro	per misurare resistenze
• il multimetro o tester universale	riunisce in sé le caratteristiche degli strumenti precedenti
• l'oscilloscopio	permette di visualizzare e misurare tensioni che variano molto rapidamente

L'oscilloscopio permette di visualizzare i segnali in tensione su un piccolo schermo, mentre gli altri strumenti consentono la lettura su una scala ad ago o su una scala numerica.
Nei paragrafi seguenti non viene illustrato il principio di funzionamento degli strumenti, ma vengono fornite solo alcune indicazioni generali per l'utilizzo di amperometri e voltmetri.

L'amperometro deve essere inserito in serie sul filo in cui circola la corrente, in modo da essere attraversato dalla corrente che deve essere misurata.
Se vogliamo misurare la corrente I che passa nella resistenza R in figura a, dobbiamo staccare il filo dalla resistenza, per esempio nel punto P, e inserire in serie l'amperometro, come nella figura b



a



b

Se l'amperometro è uno strumento ad ago la corrente deve entrare nel morsetto positivo e uscire da quello negativo, mentre se la scala è numerica, il verso in cui passa la corrente viene semplicemente indicato da un segno + o - sul visore.
L'inserimento dell'amperometro altera il circuito in cui viene inserito in quanto possiede esso stesso una certa resistenza. La resistenza interna dell'amperometro R_A deve essere piccola in modo da alterare in modo trascurabile le misure.
Supponiamo, per esempio, che la corrente I che circola nella resistenza della figura a sia dovuta a una differenza di potenziale V, e cioè che sia $I = V/R$. Dopo l'inserimento dell'amperometro la corrente che circola nella resistenza è $I'=V/(R+R_A)$.
La variazione di corrente dovuta all'inserimento dell'amperometro è

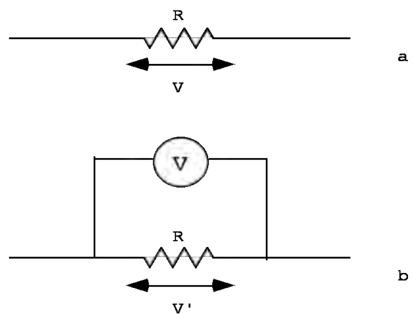
$$\Delta I = \frac{V}{R+R_A} - \frac{V}{R} = -V\frac{R_A}{(R+R_A)\cdot R}$$

e dunque l'errore relativo sulla misura di corrente è

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{R_A}{(R+R_A)}$$

e quest'ultimo è trascurabile se R è molto maggiore della resistenza dell'amperometro R_A.
Da queste considerazioni si vede che un amperometro "ideale" dovrebbe avere una resistenza nulla.

Nel caso delle misure di differenza di potenziale, o tensione, ci si deve ricordare che si tratta sempre di misure relative, e che la tensione va sempre riferita a un certo terminale. La misura più frequente è quella di differenza di potenziale tra due terminali di una resistenza: in tal caso il voltmetro deve essere inserito in parallelo con la resistenza stessa.



Anche il voltmetro, come l'amperometro, ha una certa resistenza interna R_V, e come l'amperometro anche il voltmetro altera con il suo inserimento il circuito che si sta studiando.
Se la corrente che circola è sempre I, allora la differenza di potenziale è, nel caso di figura a, $V = RI$, mentre vale

$$V' = \left(\frac{R\cdot R_V}{R+R_V}\right)I$$

nel caso di figura b. Perciò la differenza di tensione misurata nei due casi è

$$\Delta V = \left(\frac{R\cdot R_V}{R+R_V}\right)I - RI = -I\frac{R^2}{R+R_V}$$

e quindi l'errore relativo sulla misura di tensione è

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{R}{R + R_V}$$

e quest'ultimo è trascurabile se R è molto minore della resistenza del voltmetro R_V.

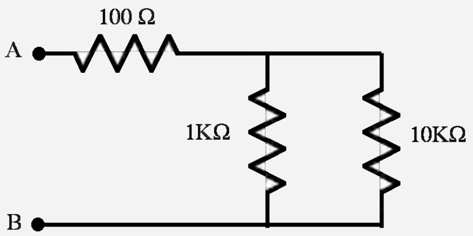
Da queste considerazioni si vede che un voltmetro "ideale" dovrebbe avere una resistenza infinita. Normalmente gli strumenti a lettura numerica hanno una resistenza interna molto maggiore degli strumenti ad ago, e quindi i voltmetri a lettura numerica sono preferibili a quelli con lettura ad ago.

Domande ed esercizi

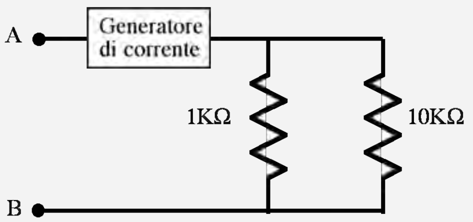
1. Supponiamo di avere un amperometro con fondo scale di 100 mA. Come si potrebbe costruire un circuito con delle resistenze per modificare lo strumento in modo tale che abbia un fondo scala di 1 A? È possibile modificare lo strumento in modo tale abbia un fondo scala di 10 mA?

2. Trovare la resistenza equivalente tra i terminali A e B per i circuiti mostrati nelle figure seguenti:

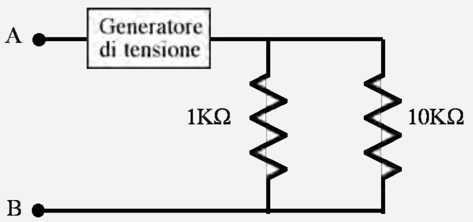
a.



b.

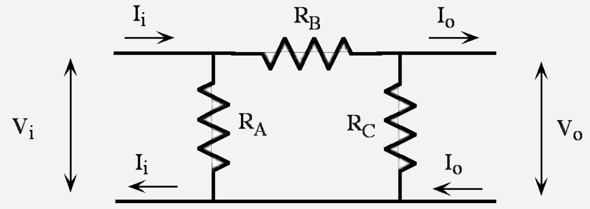


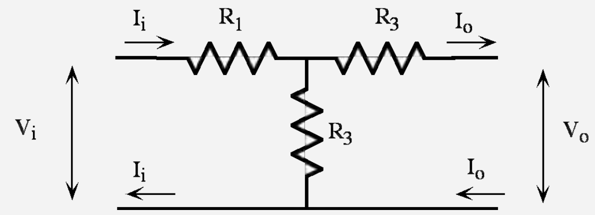
c.



3. Si consideri un voltmetro con un fondo scala di 100 mV, e si progetti una rete di resistenze che permetta di utilizzare lo stesso strumento per misurare tensioni massime di 1V.

4. Si considerino i due circuiti mostrati nella figura seguente:





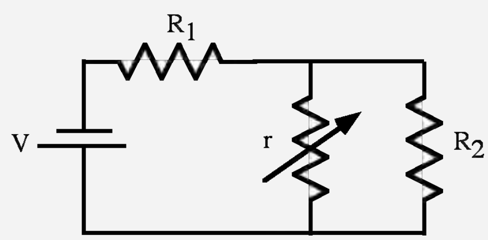
Si trovi la relazione tra R_A, R_B, R_C e R_1, R_2, R_3 in modo che i due circuiti si comportino nello stesso modo (le tensioni e le correnti d'ingresso/uscita devono essere le stesse, in modo che un generatore o un utilizzatore esterno non possa accorgersi che i circuiti sono differenti...).

5. Qual è la resistenza *R* di un filo di rame del diametro di 2 mm se esso pesa 0.893 kg? (La resistività del rame è $0.017 \cdot 10^{-4}$ Ω·cm, e la densità è 8.93 g/cm^3)

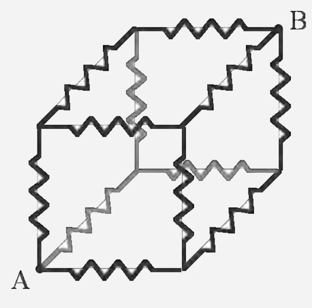
6. Che diametro *d* deve avere un filo di rame in modo che la caduta di tensione su una lunghezza di 1.4 km sia di 1V con una corrente di 1A?

7. Un circuito elettrico è costituito da tre pezzi di filo della stessa lunghezza e fatti dello stesso materiale, congiunti in serie. I tre pezzi hanno sezioni differenti: 1 mm^2, 2 mm^2 e 3 mm^2. La caduta di potenziale totale è di 11 V. Si trovi la caduta di tensione su ciascun pezzo di filo.

8. La figura seguente mostra un circuito in cui *r* è una resistenza variabile. Si disegni il grafico della corrente attraverso R_1 in funzione di *r*, supponendo che le quantità V, R_1 e R_2 siano fissate.



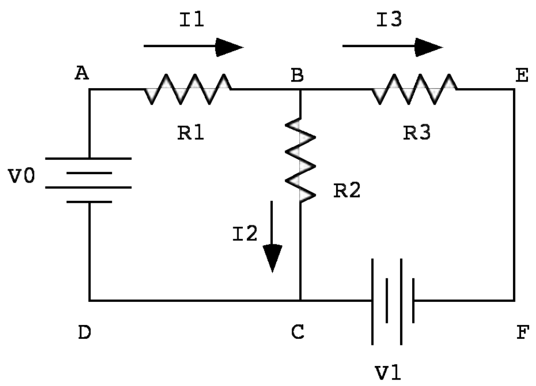
9. Si consideri il seguente circuito in cui tutte le resistenze hanno lo stesso valore di 6Ω.



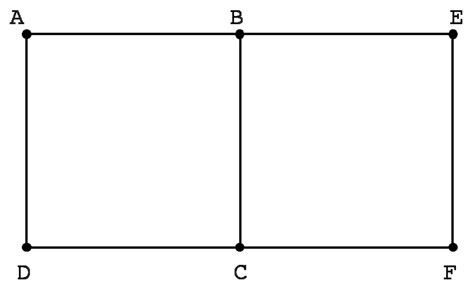
Le resistenze sono disposte lungo i lati di un cubo: si trovi la resistenza equivalente tra i due vertici A e B.

9. Grafi e circuiti elettrici

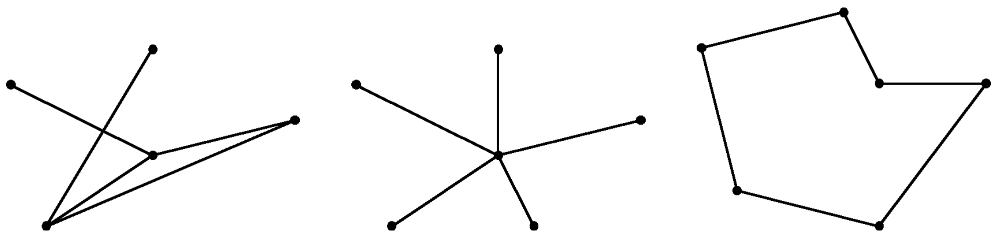
Cerchiamo di risolvere un problema legato all'applicazione delle leggi di Kirchhoff: *dato un circuito, quante sono le equazioni linearmente indipendenti che possiamo derivare dall'applicazione delle leggi di Kirchhoff?*
Il ragionamento che risponde a questa domanda viene delineato nel seguito, nella forma di un lungo esercizio. Compito della studentessa o dello studente è quello di completarlo con dimostrazioni dove ciò sia richiesto (testo in grassetto).
Consideriamo un semplice circuito come quello mostrato nella figura seguente



in questo circuito si possono individuare 3 maglie, quelle costituite dai circuiti ABCD, ABEFCD e BEFC, ci sono 7 rami, 6 nodi (dove per nodo si intende genericamente un punto dove si incontrano 2 o più rami) e 2 nodi in senso proprio, dove si incontrano tre rami. Questo circuito può essere associato ad un grafo come quello mostrato qui sotto

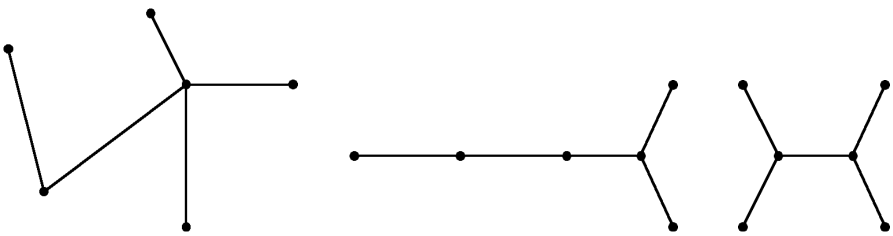


Un *grafo* è un oggetto matematico che è fatto da un insieme di vertici e da un certo numero di lati che li uniscono. Ecco alcuni esempi di grafi:



a. b. c.

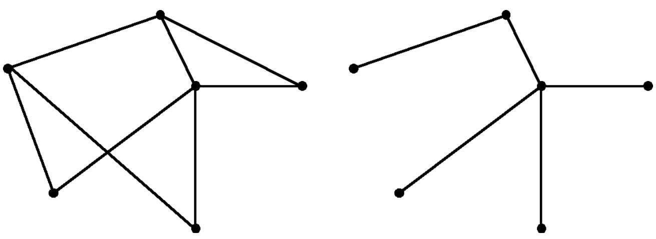
il grafo in figura b. è un esempio di *grafo ad albero*, mentre quello in figura c. è un esempio di *grafo ciclico*. Un grafo è *connesso* se per ogni coppia di vertici del grafo esiste almeno un cammino fatto di lati del grafo che congiunge i due punti. Ecco ora altri esempi di alberi connessi:



Un grafo ad albero è un grafo senza cicli. **Dimostrare che**

a. un grafo connesso è un albero se e solo se per ogni coppia di vertici esiste un solo cammino che li congiunge.
b. se E è il numero di lati di un grafo ad albero connesso e V è il numero di vertici allora $E = V- 1$.

Sia dato ora un grafo connesso G: da questo si può definire un albero connesso T che ricopre G, cioè che ha gli stessi vertici di G e solo un sottoinsieme dei suoi lati; in altre parole, si possono togliere alcuni lati di G in modo da eliminare i cicli.



G T

La figura sopra mostra un esempio di grafo e di un albero che lo ricopre.
Adesso di si consideri un grafo G con E lati e V vertici e un albero T che lo ricopre, e sia e uno dei lati di G che non appartengono a T, **dimostrare che**

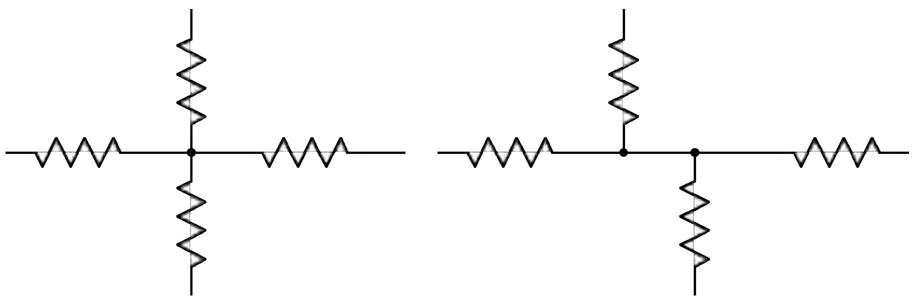
a. c'è un unico ciclo che passa per *e* e attraversa T
b. in totale ci sono *E-V+1* cicli indipendenti tra loro, nel senso che uno di questi cicli contiene almeno un lato che non appartiene a nessuno degli altri

Si consideri ora il circuito elettrico mostrato nella figura iniziale di questo paragrafo:

a. si disegni un albero che ricopre il grafo corrispondente
b. quanti e quali sono i cicli indipendenti che possiamo ottenere dall'analisi dell'albero che ricopre il grafo?

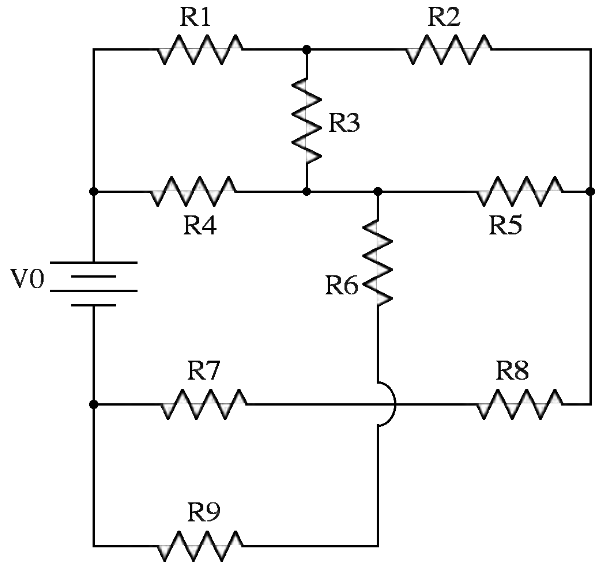
Dato un circuito elettrico qualunque possiamo individuare un insieme di cicli indipendenti. **Si dimostri che le equazioni di maglia associate a ciascun ciclo sono linearmente indipendenti tra loro.**

A questo punto abbiamo ottenuto un risultato significativo: sappiamo esattamente quante sono le equazioni di maglia che possiamo scrivere per un circuito qualunque. Ci mancano ancora le equazioni da associare ai nodi del circuito. Le equazioni di nodo sono in un certo senso più sfuggenti, perché un circuito può essere riarrangiato cambiando il numero di nodi ma senza cambiare la fisica del problema, ad esempio nel circuito seguente un nodo di molteplicità 4 viene trasformato in una coppia di nodi di molteplicità 3



Possiamo aggirare il problema ragionando come segue: orientiamo arbitrariamente ciascuna maglia e introduciamo una corrente di maglia – conservata – per ciascuna maglia indipendente del problema. **Si dimostri che la conservazione della corrente di maglia insieme al principio di sovrapposizione delle correnti implica il rispetto della legge di Kirchhoff per le correnti.**
In altre parole le sole correnti indipendenti sono le correnti di maglia, e quindi abbiamo dimostrato che per un circuito con *R* rami e *N* nodi il minimo numero di equazioni indipendenti e di variabili indipendenti è (dopo aver eliminato equazioni di nodo): *R-N+1*.

Come applicazione di quanto appena visto, **si trovi un insieme di maglie indipendenti e si scrivano le corrispondenti equazioni di Kirchhoff per il seguente circuito**:



Un progetto più ambizioso potrebbe essere poi la scrittura di un programma che:

1. Trova le equazioni di Kirchhoff di un circuito secondo lo schema qui delineato;
2. Risolve le equazioni per mezzo di una subroutine di soluzione di sistemi lineari.

Il passo 2. potrebbe essere sostituito da una subroutine per la soluzione di sistemi non lineari nel caso in cui gli elementi circuitali non siano semplici resistenze, ma elementi più complessi come diodi e altri semiconduttori.

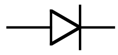
10. Il diodo semiconduttore

Il diodo semiconduttore è un dispositivo elettronico a due terminali che conduce la corrente preferenzialmente in una direzione. La teoria dei semiconduttori permette di ricavare la legge di conduzione del diodo semiconduttore

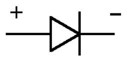
$$I_{tot} = I_0\left(e^{q_e V/kT} - 1\right)$$

dove V è la tensione applicata ai capi del diodo (e può essere sia positiva, sia negativa), q_e è la carica elementare ($q_e \approx 1.6\cdot 10^{-19}$ Coulomb), k è la costante di Boltzmann ($k \approx 1.38\cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}) e T è la temperatura assoluta.

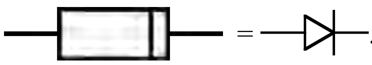
Il simbolo circuitale del diodo è il seguente:



il diodo è un ottimo conduttore quando la polarizzazione è di questo tipo (*polarizzazione diretta*)

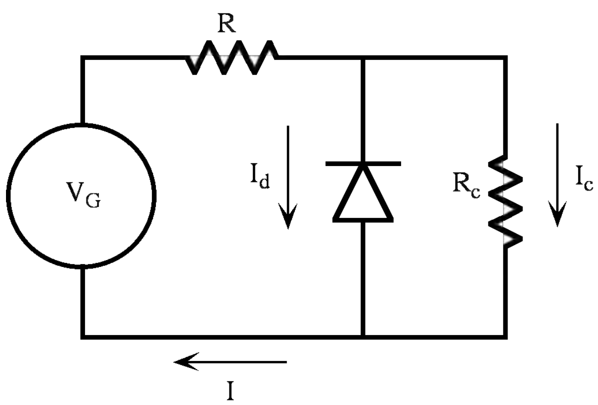


(l'altra polarizzazione è detta *polarizzazione inversa*).

Esteriormente i diodi si presentano come cilindretti con due terminali, e il terminale negativo è identificato da una strisciolina .

11. Il metodo della retta di carico

Il diodo semiconduttore ha una caratteristica tensione-corrente non lineare: per questo motivo le equazioni di Kirchhoff nel caso di circuiti che contengono diodi semiconduttori diventano equazioni non lineari, molto più difficili da analizzare delle equazioni lineari che abbiamo visto in precedenza. Per analizzare circuiti che contengono un solo elemento non lineare si utilizza il cosiddetto metodo della retta di carico che adesso illustriamo per il caso di un circuito con un diodo e due resistenze (rettificatore a semionda):



Le equazioni di Kirchhoff per questo circuito sono:

$$\begin{cases} V_G = IR + V_d \\ V_d = I_c R_c \\ I = I_d + I_c \\ V_d = V_d(I_d) \end{cases}$$

e queste si possono ridurre alla coppia di equazioni

$$\begin{cases} V_G = I_d R + V_d \left(1 + \dfrac{R}{R_c}\right) \\ V_d = V_d(I_d) \end{cases}$$

La prima è una retta nel piano (V_d,I_d), mentre la seconda non è che la curva caratteristica del componente non lineare (in questo caso il diodo), e la coppia soluzione (V_d,I_d) si può trovare come intersezione geometrica di queste due curve